* Les différents formes d'un PL

1/ Forme Canonique :

Les PL utilise précédament sont écritent sous la Forme canonique, sous cette forme Toutes les Contraintes sont des inégalités.

$$PL \begin{cases} \underline{Max} \quad Z = c^T x \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Forme canonique Matricielle

x : Vecteur des Variables

c : Vecteur

A : Matrice ~~carrée~~

$$\begin{cases} \text{lignes} = \text{contraintes} \\ \text{colones} = \text{variables} \end{cases}$$

$$PL \begin{cases} \underline{Min} \quad Z = c^T x \\ Ax \geqslant b \\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

2/ Forme standard :

Un PL sous forme standard lorsque ses contraintes sous des égalités

Donc :

$$PL \begin{cases} \underline{Max} \quad Z = c^T x \\ Ax + e = b \\ x \geqslant 0 , e \geqslant 0 \end{cases}$$

$$PL \begin{cases} \underline{Min} \quad Z = c^T x \\ Ax - e = b \\ x \geqslant 0 , e \geqslant 0 \end{cases}$$

Avec :

n = Nbre des variables.

m = Nbre des Contraintes.

$c, x \in R^n$

b (1) : Vecteur de [m] valeur.

A : Matrice de Taille [m, n]

Donc :

$A = [m, n]$; $b = [1, m]$.

$c = [1, n]$.

(1) : contraintes

②

La forme s'utilise dans la résolution graphique et la forme standard s'utilise dans la résolution algébrique

Chapitre 3 :
Résolution d'un PL par la méthode graphique.

La résolution d'un PL consiste à chercher des solutions optimals du problème.

Il existe plusieurs techniques de résolution pour les programme linéaire :

→ graphique.

→ Analytique (Symplexe, Algébrique avec des Tabeax,

La résolution graphique d'un programme linéaire PL consiste à tracé la droite qui sépart les demi plans pour chaque contrainte toutes en conservant le demi plan acceptable. c'est à dire le demi plan des solution réalisable pour chaque contrainte l'intersection des différent demi plan de toutes les contraintes sans oublier les contraintes de positivités forment le polygone des solutions

Définitions:

* Une solution Réalisable est une solution qui vérifiée les contraintes de PL.
* Une solution optimales est une solution réalisable qui optimise (max/min) la fonction objectif qui peut être unique, multiple, infini ou impossible.
* Région Réalisable est l'ensble de toutes les solutions réalisables.

Construction RR → SR
SRO ←

La Recherche de la SRO:

Après la construction de RR cette ensemble contient un Nbre infini des SR, donc il reste à repérer parmis ces solutions celle(s) qui donne(nt) à Z (fonction objectif) la mèilleur valeur (max/min).

En fixant Z à une valeur choisi, on obtient la droite:

$$\boxed{a x_1 + b x_2 = P} \;/\; Z = P$$

Ce sont toutes les droites parallèles de pentes

pente $\left(\frac{-a}{b}\right)$

$\vec{V_d}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ① ; $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ②

toutes les points sur la m̂ droite assurent la m̂ valeur pour Z

① = شعاع توجيه ② = la normale

Quand on passe d'une droite à une autre les valeurs de Z variés, ils augmentes si on déplace dans le sens du vecteur normal ($\vec{n}$).

La SO s'il existe se trouve sur la frontière de la région Réalisable, donc il se fait d'examiner les points extrêmes de la RR.

exemple :

Un fabricant produit deux types de yaourette à la fraise (A) et (B) à partir de fraise, du lait et du sucre, chaque yaourette doit respecter les proportions suivantes :

	A	B	contrainte
Fraise	2	1	800kg
lait	1	2	700kg
sucre	0	1	300kg

projet	4/kilo	5/kilo

PL : pour max = 4A + 5B

$$\begin{cases} 2A + B \leqslant 800 & \text{... ①} \\ A + 2B \leqslant 700 & \text{... ②} \\ B \leqslant 300 & \text{... ③} \end{cases} \quad A, B \geqslant 0.$$

pour ① :

Soit $\begin{cases} A = 0 \Rightarrow B = 800 \\ B = 0 \Rightarrow A = 400. \end{cases}$

le demi plan acceptable c'est pour le point (0, 0) = (A, B)

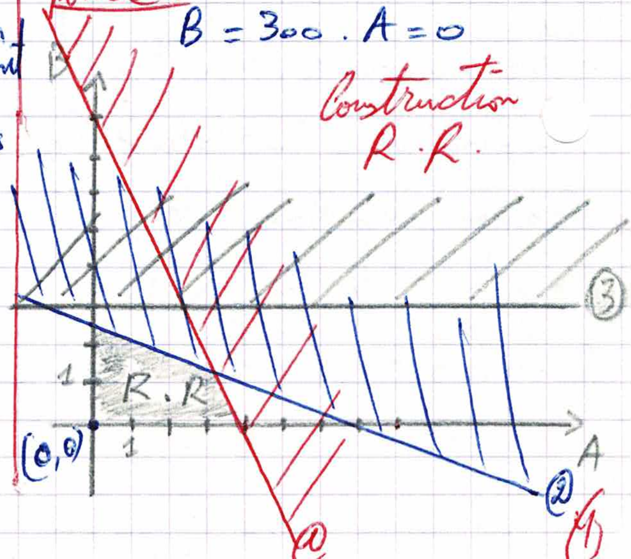
pour ② :

Soit $\begin{cases} A = 0 \Rightarrow 2 = 350 \\ B = 0 \Rightarrow A = 700 \end{cases}$

pour ③ :

B = 300 . A = 0

Construction R.R.



La recherche de la S O :

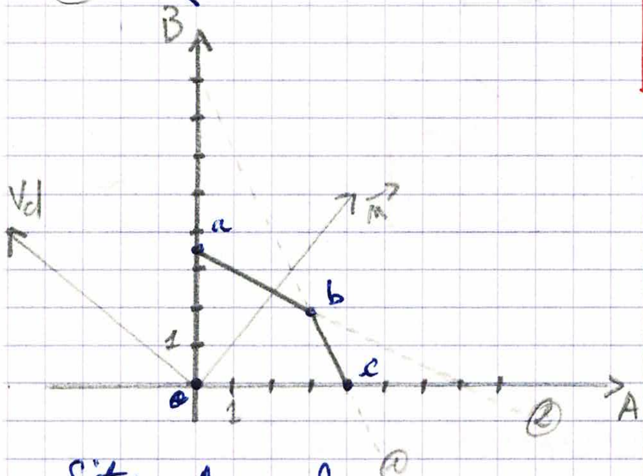
On a :

$$Z = \overset{a}{4}A + \overset{b}{5}B$$

Soit :

$$\vec{V_d}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V_d}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}.$$



Soit : $\left.\begin{array}{l}A=0\\B=0\end{array}\right\} \Rightarrow Z = 0.$

$a : \left\{\begin{array}{l}A=0\\B=350\end{array}\right\} \Rightarrow Z = 1750$

$c : \left\{\begin{array}{l}A=400\\B=0\end{array}\right\} \Rightarrow Z = 1600.$

pour le point b :

$$\begin{cases}2A+B=800\\A+2B=700\end{cases}$$

$$\begin{cases}2A+B=800\\2A+4B=1400\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}A=300\\B=200\end{array}$$

Donc $Z = 2200 \Rightarrow A=300,\ B=200$

Exemple ② :

Une Entreprise de chassé envisage la production de deux nouveau modèlles en moyen des capacités des ces trois atelièrs (en Alluminium et en bois).

le 1er model nécessite le passage dans le 1er Atelièr pour fabriquer le Cadre en Aliminium et dans le 3ème Atelièr ou le vert et monter sur le chassé. tandisque le 2ème model nessiate le passage dans le 2ème Atelièr pour fabriguer le Cadre en bois et dans le 3ème Atelièr ou le vert etst mondé sur le chassé.

les profile unitaire du temps de fabrication de chaque produit et les capacité hébdomadaire de ces Ateliers sont donné par le Tableau.

	M_1	M_2	Contraints
Atelier1	1	0	4
" 2	0	2	12
" 3	3	2	18
projet	300 da	500 da	X

donc :

~~Q~~ e Combien faut il produire de chasis de chaque type/semaine pour avoir un projet maximal ?

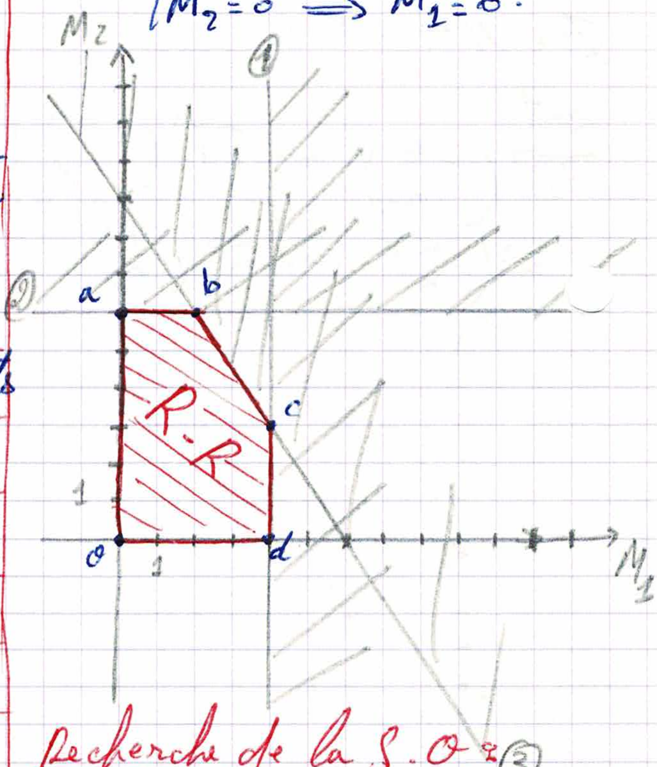
sol :

PL : pour max : $Z = 300M_1 + 500M_2$

$$\begin{cases} M_1 \leqslant 4 \quad \text{--- ①} \\ 2M_2 \leqslant 12 \quad \text{--- ②} \quad M_1, M_2 \geqslant 0 \\ 3M_1 + 2M_2 \leqslant 18 \quad \text{--- ③} \end{cases}$$

pour ③ :

$$\text{soit} \begin{cases} M_1 = 0 \Rightarrow M_2 = 9 \\ M_2 = 0 \Rightarrow M_1 = 6. \end{cases}$$



Recherche de la S.O :

$Z = 300M_1 + 500M_2$

pour $o(0,0) \Rightarrow Z = 0$.

pour $a(0,6) \Rightarrow Z = 3000$.

pour $d(4,0) \Rightarrow Z = 1200$

pour $b(\frac{1}{3}, 6)$

$$\begin{cases} 2M_2 \leqslant 12 \\ 3M_1 + 2M_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_2 = 6 \\ M_1 = 2 \end{cases}$$

$Z = 3600 \quad (M_1, M_2)$.

pour $c(2,6) \Rightarrow Z = 3600$

⑥

$$\begin{cases} M_1 = 4 \\ 3M_1 + 2M_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 = 4 \\ M_2 = 3 \end{cases}$$

$Z = 2700 \quad (4, 3)$

Donc :

$$Z = 4400 \Rightarrow \begin{cases} M_2 = 14/3 \\ M_2 = 6 \end{cases}$$

Pl pour $Z = max$ est

$M_1 = 2$ et $M_2 = 6$ $Z = 3600$

Exemple ③ :

Une entreprise a besoin de (03) matières premières A, B et C pour fabriquer un produit, il lui faut 14 kg de A, 12 kg de B et 18 kg de C au moins, il ne peut acheter que les mélanges X et Y :

- le produit X = 2 kg A, 1 kg B, 1 kg C

le produit Y = 1 kg A, 1 kg B, 3 kg C

le produit X coûte 20 da.

le produit Y coûte 40 da.

il ne peut pas acheter plus de 14 kg de X et 16 kg de Y.

quelle quantité de X et Y doit en acheter pour répondre au besoin de l'entreprise au moindre coût ?

Sol :

	X	Y	contrainte
A	2	1	14
B	1	1	12
C	1	3	18
	20	40	

~~$Z = 14A + 12B + 18C$~~

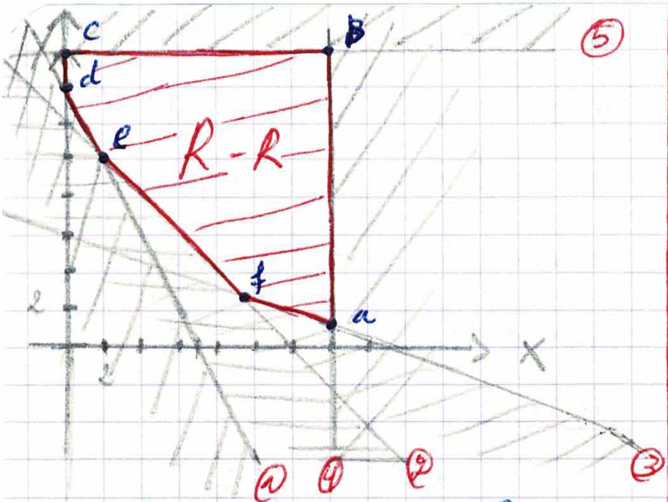
Donc :

$\min 20X + 40Y$

Donc :

$$\begin{cases} 2X + Y \geq 14 \text{ -- ①} & X \leq 14 \text{ -- ④} \\ X + Y \geq 12 \text{ -- ②} & \\ X + 3Y \geq 18 \text{ -- ③} & Y \leq 16 \text{ -- ⑤} \end{cases}$$

$X, Y \geq 0.$



pour ①:

$x=0 \Rightarrow y=14$
$y=0 \Rightarrow x=7$

pour ②:

$x=0 \rightarrow y=12$
$y=0 \Rightarrow x=12$

pour ③:

$x=0 \Rightarrow y=6$
$y=0 \Rightarrow x=18$

Donc :

pour c: $x=0$ et $y=16$; $Z=640$

pour b: $x=14$ et $y=16$; $Z=920$.

pour a:

$$\begin{cases} x+3y=18 \\ x=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=14 \\ y=4/3 \end{cases};\ Z=333{,}33$$

pour f:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x+3y=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases};\ Z=300.$$

pour e:

$$\begin{cases} 2x+y=14 \\ x+y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=10 \end{cases};\ Z=440$$

pour d:

$x=0$, $y=14 \Rightarrow Z=560$

Donc le min est pour

$x=9$ et $y=3 \Rightarrow Z=300$ DA

Supposant que le prix de produit (x) augmante de (20 DA) donc $\Rightarrow Z=40x+40y$.
Il y a une multiplicité de solutions optimales.

$$\begin{cases} Z=40x+40y \rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}40\\40\end{pmatrix} \\ x+y \geq 12 \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

Sont en parallèle.

Exemple:

$$PL \begin{cases} \min Z = 4x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + x_2 \geq 10 \text{ ---} ① \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 \text{ ---} ② \\ x_1 + 6x_2 \geq 9 \text{ ---} ③ \\ x_1, x_2 \geq \end{cases}$$

Donc Il y a une multiplicité de solution car :

$Z = 4X_1 + 2X_2 \rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

$2X_1 + X_2 \Rightarrow \vec{m}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{n} \circ \vec{m} = [4 \times 1] - [2 \times 2] = 0$

Donc $\vec{n} \parallel \vec{m}$.

pour ① :

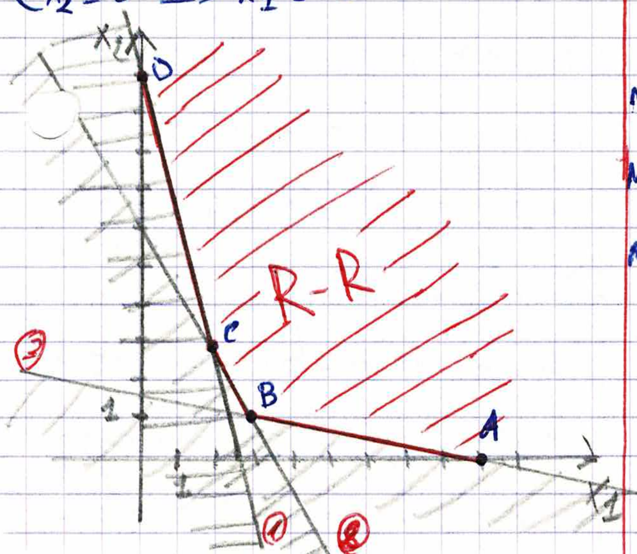
$\begin{cases} X_1 = 0 \Longrightarrow X_2 = 10 \\ X_2 = 0 \Longrightarrow X_1 = 10/4 = 5/2. \end{cases}$

pour ② :

$\begin{cases} X_1 = 0 \Longrightarrow X_2 = 7 \\ X_2 = 0 \Longrightarrow X_1 = 7/2. \end{cases}$

pour ③ :

$\begin{cases} X_1 = 0 \Longrightarrow X_2 = 3/2. \\ X_2 = 0 \Longrightarrow X_1 = 9 \end{cases}$



pour (A) : $X_1 = 9$, $X_2 = 0$, $Z = 36$

pour (D) : $X_2 = 10$, $X_1 = 0$, $Z = 20$.

~~2X+X~~ pour (C)

$\begin{cases} 4X_1 + X_2 = 10 \\ 2X_1 + X_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 3/2 \\ X_2 = 4 \end{cases}, Z = 14$

pour (B)

$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 7 \\ X_1 + 6X_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 3 \\ X_2 = 1 \end{cases}, Z = 14$

Donc :

$Z_C = Z_D = 14$. Donc la solution optimale est $[CB]$.

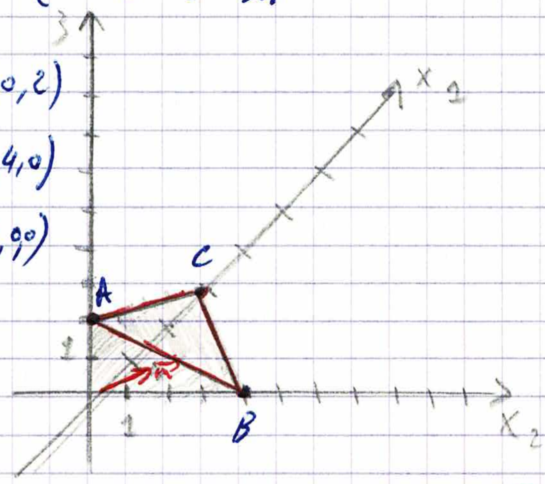
Exemple :

$$P2 \begin{cases} \max \ Z = X_1 + X_2 + 0X_3 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 4 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

$M_1(0,0,2)$

$M_2(0,4,0)$

$M_3(2,0,0)$



pour (A) $\Rightarrow Z = 0$

pour (B) $\Rightarrow Z = 2$

pour (c) $\Rightarrow Z = 4$

chap 4: Résolution d'un PL par la méthode du Simplexe.

La methode graphique pour la résolution d'un PL à deux variables est facile à appliquer. Sa difficulté augmente par l'augmentation du Nbre de variables, Elle devient difficile pour trois variable et voire impossible au delà. de trois inconnus.

Afin d'enlever cette difficulté, un Alogorithme Appelé Algorithme de symplexe a été proposé et développé par Dantzig 1948.

Afin de résoudre des problem de programation linéaire avec plusieurs variable l'application de cette Algorithme démarre par la transformation des contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité (Canonique ⟶ standard). en ajoutant des variables d'écart. cet Algorithme existe se forme de deux méthode:

* Algébrique.
* Tableau des Symplexe

principe:

le principe est le suivant:

procédure d'initialisation:

Le sélectionant les variables original comme variable hors base. et les variables d'écart comme variables de base

$$\begin{cases} X_i = \text{variable hors base.} \\ e_i = \text{" de base.} \end{cases}$$

Procédure d'itération:

nous éffectuons une permettations entre une variable hors base. (entrante) par une variable de base (sortant), le choix de la variable entrante repose sur la variable dont le coefficient de la fonction objectif est le plus élevé. (le plus faible dans le cas de minimization). Cette operation consiste à passer d'un sommet à un autre ajassant corespend Algébriquement à un changt de base.

procédure d'arrêt:

le processus contime jusqu'à ce que tous les coefficiens de la fonction soient négatifs ou nuls (positifs ou nuls dans le cas de minimization). dans ce cas on arrête est la Solution optimale est Trouvée.

Etape 1:

*La construction du Tableau

*À la première itération. On sélectionne la variable qui a le coefficient le plus élevé (plus faible) dans la fonction objectif La colone de la variable entrante est la colone pivot.

Etape 2:

*On calcule le minimum du rappot des coefficiens "C" (contraintes) sur les coefficiens de la colone pivot.

Dans le cas ou les valeurs de "K" sont infinis ou négatifs on les compte pas.

*On encadre la ligne pivot l'intersection s'appelle (de la colone pivot et la ligne pivot) pivot

Etape 2:

On reconstruit un Nouveau Tableau:

*En commencant par la nouvelle ligne pivot ou:

$$\text{Nouvelle ligne pivot} = \frac{\text{Ancienne ligne pivot}}{\text{élément pivot}}$$

puit on calcule les autre ligne par la formule:

$$N.L = A.L - NL_P * AC.P$$

Exo :

On a :

$$PL\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10\,000 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12\,000 \\ x_1 + 4x_2 \leq 15\,000 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

[F.C]

$\underline{max} : Z = 3x_1 + 5x_2$.

Sol :

1/ On passe de la forme symplexe [F.S] donc :

$max : Z = 3x_1 + 5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$

$$PL\begin{cases} x_1 + 2x_2 + e_1 = 10\,000 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_2 = 12\,000 \\ x_1 + 4x_2 + e_3 = 15\,000 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

2/ On construit le Tableau :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	1	2	1	0	0	10000	$\frac{10000}{2}$
e_2	2	3	0	1	0	12000	$\frac{12000}{3}$
e_3	1	4	0	0	1	15000	$\frac{15000}{4}$
Z	3	5	0	0	0	0	

ligne pivot

colone pivot $\Big\} \Rightarrow (4)$ le pivot

3/ On construit le nouveau Tableau :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	0,5	0	1	0	-0,5	2500	5000
e_2	1,25	0	0	1	-0,75	750	600
x_2	0,25	1	0	0	0,25	3750	15000
Z	1,75	0	0	0	-1,25	-18750	

Donc :

$(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (0, 3750, 2500, 750, 0)$

$Z = 18750$.

On vérifie les coéfficiens de $Z \leq 0$

4/ On construit un nouveau Tableau :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	0	0	1	-0,4	-0,2	2200	
x_1	1	0	0	0,8	-0,6	600	
x_2	0	1	0	-0,2	0,4	3600	
Z	0	0	0	-1,4	-0,2	-19800	

Donc Coef$(Z) \leq 0 \Rightarrow$

$(x_1, x_2) = (600, 3600)$; $Z = 19800$

13

Exo 2:

$$P\begin{cases} \text{Max} : Z = 300X_1 + 500X_2 \\ X_1 \leq 4 \\ X_2 \leq 6 \\ 3X_1 + 2X_1 \leq 18 \end{cases}$$

F.C $X_1, X_2 \geq 0$

Sol:

$Z = 300X_1 + 500X_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$

$$\begin{cases} X_1 + e_1 = 4 \\ X_2 + e_2 = 6 \\ 3X_1 + 2X_2 + e_3 = 18 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

$e_1, e_2, e_3 \geq 0$

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	1	0	1	0	0	4	∞
e_2	0	1	0	1	0	6	6
e_3	3	2	0	0	1	18	9
Z	300	500	0	0	0		

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	1	0	1	0	0	4	4
X_2	0	1	0	1	0	6	∞
e_3	3	0	0	-2	1	6	2
Z	300	0	0	-500	0	-3000	

$(X_1, X_2) = (0, 6)$

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1							
X_2							
X_1							
Z							

Cas particuliers:

Exo 1:

Max : $Z = 30X_1 + 20X_2$.

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + e_1 = 50 \\ 3X_1 + 2X_2 + e_2 = 120 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

	X_1	X_2	e_1	e_2	C	K
e_1	1	2	1	0	50	50
e_2	3	2	0	1	120	40.
Z	30	20	0	0	0	

	X_1	X_2	e_1	e_2	C	K
e_1	0	4/3	1	-1/3	10	7,5
X_1	1	2/3	0	1/3	40	60
Z	0	0	0	-10	-1200	

Solution multiple

Donc :

$Z = 120$ pour $(x_1, x_2) = (40, 0)$.

on continue :

	X_1	X_2	e_1	e_2	C	K
X_2	0	1	3/4	-1/4	7,5	
X_1	1	0	-1/2	1/2	35	
Z	0	0	0	-10	-120	

$Z = 120$ pour $(X_1, X_2) = (35; 7,5)$

[A B].

exemple :

$$\begin{cases} Z = 4X_1 + 2X_2 & \text{Max} \\ 4X_1 + 2X_2 \leqslant 10 \\ 2X_1 + X_2 \leqslant 7 \\ X_1 + 6X_2 \leqslant 9 \end{cases}$$

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	4	2	1	0	0	10	2,5
e_2	2	1	0	1	0	7	3,5
e_3	1	6	0	0	1	9	9
Z	4	2	0	0	0	0	

(2,5, 0)

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	C	K
X_1	1	0,5	0,25	0	0	2,5	5
e_2	0	0	-0,5	1	0	2	∞
e_3	0	5,5	-0,25	0	0	6,5	1,180
Z	0	0	-1	0	0	-10	

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	C	K
X_1	1	1	0,5	0	0	21/11	
e_2	0	0				2	
X_2	0	0				1,18	
Z	0	0	-1	0	0	-10	

Donc :

$A(2,5, 0)$ et $B\left(\frac{21}{11}, \frac{13}{11}\right)$

$Z = 10$

Problème de min :

Soit PL suivant :

$$PL \begin{cases} Z = 30X_1 + 24X_2 + 18X_3 \\ 5X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geqslant 8 \\ 3X_1 + 3X_2 + 3X_3 \geqslant 6 \\ X_1, X_2, X_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} Z = 3X_1 + 24X_2 + 18X_3 \\ 5X_1 + 2X_2 + X_3 - e_1 + t_1 = 8 \\ 3X_1 + 3X_2 + 3X_3 - e_2 + t_2 = 6 \\ X_1, X_2, X_3, e_1, e_2, t_1, t_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$T = t_1 + t_2$$

$$\begin{cases} t_1 = 8 - 5X_1 - 2X_2 - X_3 + e_1 \\ t_2 = 6 - 3X_1 - 3X_2 - 3X_3 + e_2 \end{cases}$$

Donc :

$$T = 14 - 8X_1 - 5X_2 - 4X_3 + e_1 + e_2$$

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	t_1	t_2	c	k
t_1	5	2	1	-1	0	1	0	8	8/5
t_2	3	3	3	0	-1	0	1	6	6/5
T	-8	-5	-4	1	1	0	0	-14	
Z	30	24	18	0	0	0	0	0	

*la colonne pivot est la colone qui avait la valeur minimal de la fonction T ($T=-8$)

*la ligne qui avait la valeur maximal de la colone pivot. (5).

<u>Donc</u> : x_1 rentre et t_1 sort.

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	t_1	t_2	c	k
~~x_1~~	1	2/5	1/5	-1/5	0	1/5	0	8/5	8
t_2	0	9/5	12/5	3/5	-1	-3/5	1	6/5	1/2
T	0	-9/5	-12/5	-3/5	1	8/5	0	-6/5	
Z	0	12	12	6	0	-6	0	-48	

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	t_1	t_2	c	K
x_1	1	1/4	0	-1/4	1/12	1/4	-1/12	3/2	
x_3	0	1/3	1	1/4	-5/12	-1/4	5/12	1/2	
T	0	0	0	0	0	1	1	0	
Z	0	3	0	3	5	-3	-5	-54	

<u>Donc</u> : Les coef(T) ≥ 0 et la valeur de $T = 0$.

<u>Donc</u> : $(x_1, x_2, x_3) = (3/2, 0, 1/2)$ Solution Réalisable.

on continue pour la phase ②.

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	c	k
x_1	1	1/4	0	1/4	1/2	3/2	
x_2	0	1/3	1	1/4	-5/12	1/2	
Z	0	3	0	3	5	-54	

Les Coef(Z) ≥ 0 Donc. la Solution optimale est $(x, x_2, x_3) = (3/2, 0, 1/2)$

$Z = 54$

Chap 5 : Dualité et PL en nbre entier

Dualité :

est un concept important en R,O ~~dans~~ tous programme linéaire admet un programme duale.
Le premier est appelé primal, le duale et le primal sont intimement liés
Il facile de trouver la solution de l'un dès que la solution de l'autre est bien connue
La Recherche du duale peut souvent s'imposer s'il on vois que le primal parait difficile à résoudre.

Exe

Une Entreprise (A) fabrique (04) produits, la fabrication de chaqu'un nessicite une sertain contité de ressource

Soit :

	P1	P2	P3	P4	Stock
RA	2	4	5	7	42
RB	1	1	2	2	17
RC	1	2	3	3	24
Bénifice	7	9	18	17	

On souhaite établir un plan de production de façon à maximiser le Bénifice

Sol :

$$\begin{cases} 7x_1+9x_2+18x_3+17x_4 \\ 2x_1+4x_2+5x_3+7x_4 \leq 42. \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4 \leq 17. \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4 \leq 24. \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \end{cases}$$

et une entreprise (B) ~~est~~ concurante à (A) se propose d'acheter son stock soit. y_1, y_2 et y_3 les prix unitaires respécifs de chaque ressource la question ? :
quelle prix minimum de (y_1, y_2, y_3) doit elle offrir à (A) tous temps restant compititive ?
le problème revient à vendre minimum le coût recherché par l'entreprise (B)

Donc :

PRIMAL :

$$\begin{cases} \text{Max} : 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ou : pour (B).

	R_1 y_1	R_2 y_2	R_3 y_3	C
P1	2	1	1	7
P2	4	1	2	9
P3	5	2	3	18
P4	7	2	3	17
w	42	17	24	

Donc :

DUAL

$$\begin{cases} \text{Min } w = 42y_1 + 17y_2 + 24y_3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 7 \\ 4y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 9 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 18 \\ 7y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 17 \\ x_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le format :

$$\underbrace{\begin{matrix} \text{Max } z = c^T . x \\ A.x \leq b \\ x \geq 0 \end{matrix}}_{\text{Primal (P)}} \Rightarrow \underbrace{\begin{matrix} \text{Min } w = b^T . y \\ A^T . y \geq c \\ y \geq 0 \end{matrix}}_{\text{Dual (D)}}$$

Ex :

$$(P) \begin{cases} \text{Max} : z = x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 14 \rightarrow y_1 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \rightarrow y_2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \rightarrow y_3 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$(D) \begin{cases} \text{Min} : w = 14y_1 + 12y_2 + 12y_3 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Soit :

$$(P) \begin{cases} \text{Max} : z = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$(D) \begin{cases} \text{Min} : w = 8y_1 + 7y_2 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ 4y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Propriété = Primal _ Dual : (1)

Soient x, y des solutions réalisables du (P_D) respectivement, si $Z = W$ $[c^T x = b^T y]$.

x et y sont optimals pour (P_D)

Théoreme des equarts Complementaires

* Une solution réalisable positive de l'un (P_D) correspond à une contrainte saturée de l'autre.
* Une contrainte non saturée de l'un (P_D) correspond à une solution nulle de l'autre.
* Soit :

(P) $x_i > 0 \longrightarrow a_i^T y = c_i$

(D) $y_i > 0 \longrightarrow a_i^T x = b_i$

$a_j^T y < c_j \longrightarrow x_j = 0$

$a_j^T x < b_j \longrightarrow y_j = 0$

Ex :

* (P)
$$\begin{cases} \text{Max } 15x_1 + 25x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 96 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 238 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

est ce que la solution (0, 32) est optimale ?

(1) $\begin{cases} \forall j, \; y_j(b_j - \sum_i a_{ij} x_i) = 0 \\ \forall i, \; x_i(\sum a_{ij} y_j - c_i) = 0 \end{cases}$

(D)
$$\begin{cases} \text{Min } W = 96y_1 + 40y_2 + 238y_3 \\ y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 15 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 25 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Les deux contraintes (2) et (3) ne sont pas saturée donc $y_2 = y_3 = 0$.

$x_2 > 0 \longrightarrow$ 2ème contrainte du Dual est saturée

$3y_1 + \cancel{y_2} + 4\cancel{y_3} = 25 \Rightarrow \boxed{y_1 = 25/3}$

$(y_1, y_2, y_3) = (25/3, 0, 0)$.

La 1ère contrainte n'est pas vérifiée

donc (0, 32) n'est pas optimale

* Soit la solution :

$(x_1, x_2) = (12, 28)$? optimale

3ème contrainte n'est saturée

$\longrightarrow y_3 = 0$.

1ère, 2ème positive $\longrightarrow$

$\begin{cases} y_1 + y_2 = 15 \\ 3y_1 + y_2 = 25 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 10 \end{cases}$

(5, 10, 0) Réalisable.

$W = 880$ et $Z = 880$

Donc :

$(x_1, x_2) = (12, 28)$
$(5, 10, 0) = (y_1, y_2, y_3)$
$\Big\}$ sont optimales

Chap(3) : Dualité,

Exemple :

$$\begin{cases} \text{Min } Z = 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

→ Formuler le Dual.

→ Résoudre le Dual par Simplexe en déduisant les solutions du Primal.

Sol :

$$\begin{cases} \text{Max } W = 2y_1 + y_2 \\ y_1 + 5y_2 \leq 10 \\ y_1 + 3y_2 \leq 6 \\ 2y_1 + 8y_2 \leq 8 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

méthode de Simplexe :

	e_1	e_2	x_1	x_2	x_3		
	y_1	y_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	1	5	1	0	0	10	
e_2	1	3	0	1	0	6	
y_1	1	1	0	0	0,5	4	
W	0	-1	0	0	-1	-8	

Donc : $W \leq 0$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$ pour Primal

on inverse dans le Tableau avec la multiplication des valeurs par (-1).

Donc : $(e_1, e_2, x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0, 0, 1)$.

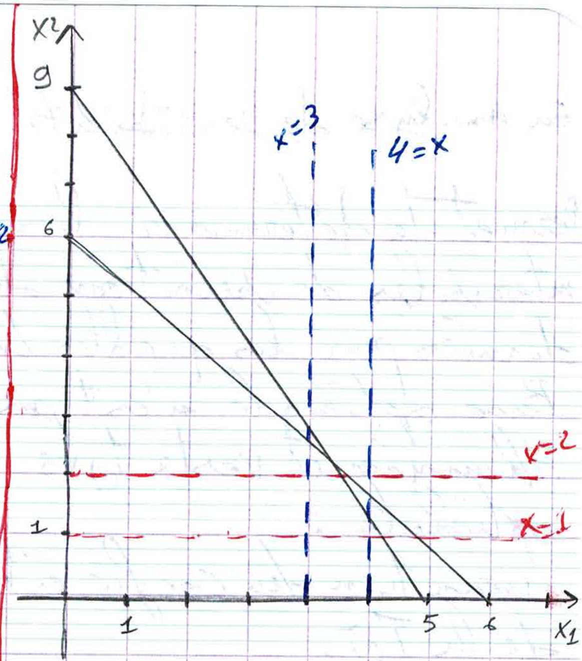
PLNE :

pour résoudre 1 PL de manière efficasse on utilise le simplexe, cependant les solution obtenus sont des résultats exactes (réélles) or pour 1 PL déscrét la réalisation se fait à l'unité (production des tables (entier)) la solution obtimale des se problème doit être en procédure de séparation et évaluation (Branch & Bound)

Cette méthode est déstinée à résoudre des problèmme linéare en Nbre entier elle consiste à appliquer

Une

en adoptant le principe de "diviser pour régner". qui délimite l'exploration de toutes les branches et qui élimine des solutions partielles ne menant pas à la solution optimale, il s'agit essentiellement de effectuer une composition du problème en sous-problème plus simplet, puis on combine. La résolution de tous sous problèmme pour obtenir la solution du problème original.



Exemple :

$$P : \begin{cases} \text{Max } Z = 8x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

les solution suivant la simplexe $(Z; x_i) = (41,25 ; 3,75 ; 2,25)$

Ou Analyse de sensibilité

Permet de déterminer les intervalles de variation des données pour lesquelles la Base optimale n'est pas changée et reste tjrs optimale :

* Variation des coéficients de la F.O.
* Variation du Second membre
* Addition/Suppression d'une Contrainte
* Addition/suppression d'une variable.

Exemple :

$$(PL)\begin{cases} \text{Max. } Z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

par Simplexe :

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 0e_1 + 0e_2$$

$$1x_1 + 0x_2 + e_1 + 0e_2 = 4$$

$$0x_1 + 2x_2 + 0e_1 + e_2 = 12$$

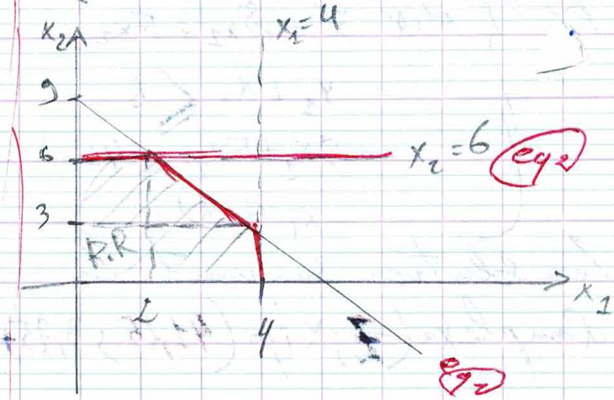
$$3x_1 + 2x_2 + 0e_1 + 0e_2 + e_3 = 18$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	1	0	1	0	0	4	∞
e_2	0	2	0	1	0	12	6
e_3	3	2	0	0	1	18	9
Z	3	5	0	0	0		

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	1	0	6	∞
e_3	3	0	0	-2	1	6	2
Z	3	0	0	-5	0	-30	

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	K
e_1	0	0	1	2/3	-1/3	2	
x_2	0	1	0	1/2	0	6	
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2	
Z	0	0	0	-3/2	-1	-36	

$(x_1, x_2, x_3) = (2, 6, 0)$ $Z = 36$



On a : $Z = C_1 x_1 + C_2 x_2$

Suivant "C_1" :

$Z = C_1 x_1 + 5 x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{-C_1}{5} x$

C_1

Suivant "C_2" :

$\begin{cases} C_2 x_2 + 3x_1 = Z \Rightarrow x_2 = \frac{-3}{C_2} x_1 + \frac{Z}{C_2} \\ x_2 = 0 . x_1 + 6 . \end{cases}$

Donc pour (C_1) :

$C_1 x_1 + C_2 x_2 = Z .$

$3 x_1 + 5 x_2 = Z .$

or :

$C_1 x_1 + 5 x_2 = Z \Rightarrow x_1 = \frac{-5}{C_1} x_2 + \frac{Z}{C_2}$

on le compare / eq1 :

$3x_1 + 2x_2 = 18 \Rightarrow x_1 = \frac{-2}{3} x_2 + 6$

Donc : :

$\frac{5}{C_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{15}{2}}$

on le compare / eq2

$x_2 = 6 = 0 x_1 + 6 .$

$x_2 = \frac{-C_1}{5} x_1 + \frac{Z}{5}$

Donc : $\frac{-C_1}{5} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Donc :

$0 \leqslant C_1 \leqslant \frac{15}{2}$

Suivant (C_2) :

$\cancel{x_2} = 3x_1 + C_2 x_2 = Z .$

$x_2 = \frac{-3}{C_2} x_1 + \frac{Z}{C_2} .$

on le compare / eq1 :

$x_2 = \frac{3}{-2} x_1 + 9$

Donc :

$\frac{-3}{C_2} = \frac{-3}{2} \Rightarrow \boxed{C_2 = 2}$

on le compare / eq2 :

$x_2 = 6 = 0 x_1 + 6 -$

$x_2 = \frac{-3}{C_2} x_1 + \frac{Z}{C_2}$

$\frac{-3}{C_2} = 0 \Longrightarrow \boxed{C_2 = +\infty}$

Donc : $2 \leqslant C_2 \leqslant \infty .$